**Билет 26 Модель динамики репликаторов**

**Модель динамики репликаторов (МДР)**

(Модель динамики поведения в самовоспроизводящихся популяциях)

*Формально популяционная игра G задается совокупностью параметров*

$G=<J,f\_{j}(π,ω),j\in J, π\in Π,ω\in Ω> $*, где*

*J − множество стратегий участников этой игры;*

$π=(π\_{j})\_{j\in J}$ *− распределение игроков по стратегиям;*

$Π=\left\{π|π\_{j} >0, \sum\_{j\in J}^{}π\_{j}=1\right\}$*− стандартный симплекс;*

$f\_{j}(π,ω)$ *– выигрыш игроков, использующих стратегию j в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды).*

*Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. В данном разделе эта функция задана экзогенно.*

*Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется распределение π\* такое, что всякая стратегия, которая используется с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω, т.е. ,*

$∀ω\in Ω, ∀j\in J(π\_{j}^{\*}>0)⇒j\in Argmax f\_{i}(π^{\*},ω), i\in J (1)$

*Пусть функции выигрыша в игре G разложимы, т.е. имеют вид*

$f\_{}(π, ω) = a(π, ω)\overline{f\_{}}(π)+b(π, ω), где a(π, ω) >0.$*, как в модели случайных парных столкновений. Отметим, что та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω. Тогда (1) эквивалентно условию, которое уже не содержит параметра ω:*

$ ∀j\in J:π\_{j}^{\*}>0⇒j\in Argmax \overline{f\_{i}}(π^{\*}), i\in J$ *.*

*Понятие равновесия по Нэшу является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако из анализа динамических моделей известно, что среди равновесий по Нэшу бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться.*

• Популяция характеризуется множеством S возможных *стратегий*.

• Распределение индивидуумов по стратегиям в данный момент времени задается

вектором $π=(π\_{s}, s \in S).$

• Индивидуумы различаются только стратегиями поведения, не меняют стратегию в

течение жизни, а потомки наследуют стратегию родителей.

• Если говорить о двуполых популяциях, то в данной модели индивидуумов одного пола следует рассматривать как отдельную популяцию.

• Известны соответствующие механизмы наследования – генетические, когда стратегия

поведения задается генами, сцепленными с половым геном, а также механизмы

подражания, когда стратегия определяется путем подражания поведению родителя

соответствующего пола.

• Итог взаимодействия в популяции за данный период времени характеризуется для

участников со стратегией s *функцией рождаемости* $fer\_{s}(π, N)$, определяющей среднее число потомков, и *функцией выживаемости* $ν\_{s}(π, N)$ , определяющей долю выживших в зависимости от распределения π и *общей численности популяции* N.

Обозначим $N\_{s}=π\_{s}N$- численность использующих стратегию s .

Тогда динамика численностей $N\_{s}(t), s \in S,$описывается следующей системой:

$N\_{s}(t+1) =N\_{s}(t)f\_{s}(π(t), N(t)), t = 1,2,...,\_{} (3.1)$

где $f\_{s}(π, N)=fer\_{s}(π, N) + ν\_{s}(π, N)$называется *функцией приспособленности* стратегии s и формализует введенное Ч. Дарвином понятие индивидуальной приспособленности.

На первый взгляд, понятие функции выигрыша не применимо к данной модели: стратегии участников фиксированы, они ни к чему не стремятся и ничего не выбирают. Однако, картина меняется, если посмотреть на динамику распределения по стратегиям.

Приводимая далее теорема показывает, что асимптотика поведения в такой популяции

согласуется с приспособленностью как функцией выигрыша индивидуума. В частности, если при t →∞ распределение по стратегиям стремится к стационарному, то в популяции остаются лишь те стратегии, которые максимизируют приспособленность (в полном соответствии с дарвиновским принципом естественного отбора выживают наиболее приспособленные). Если при любом распределении одна стратегия обеспечивает большую приспособленность, чем другая, то доля худшей стратегии в распределении π (t) стремится к 0 при t →∞ . И в этом смысле приспособленность является эндогенной целевой функцией в данной модели.

**Связь Равновесий Нэша и устойчивых точек МДР.**

**Асимптотическая устойчивость ЭУС.**

Связь доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения.

**Теорема 3.1 (о связи равновесий Нэша и устойчивых точек МДР)**.

Пусть функция приспособленности $f\_{s}(π, N)$ разложима: $f\_{s}(π, ω) = a(π, ω)\overline{f\_{s}}(π)+b(π, ω), где a(π, ω) >0.$Тогда:

1) любое устойчивое (по Ляпунову) распределение π \* системы (3.1) является

равновесием по Нэшу популяционной игры $\overline{G}=<S,\overline{ f\_{s}}(π),s\in S, π\in Π>; $

2) если начальное распределение $\overline{N}(0) > 0$и для траектории$\left\{\overline{N}(t)\right\}$ существует

$\lim\_{t\to \infty }π(t,\overline{N}(0)) = π^{\*}$, то $π^{\*}$является равновесием Нэша указанной популяционной игры.

**Замечание.** Система (3.1) не является замкнутой, поскольку правая часть зависит также от N(t). Понятие устойчивого распределения для таких систем формально определено в Богданов, Васин (2002).

***Усто́йчивое распределе́ние*** *в теории вероятностей — это такое распределение, которое может быть получено как предел по распределению сумм независимых случайных величин.*

* *Пусть* $ξ\_{1},ξ\_{2},...$ *- независимые одинаково распределённые случайные величины и* $η\_{n}=\frac{1}{β\_{n}}\sum\_{k=1}^{n}ξ\_{k}-α\_{n}$*, где* $β\_{n}>0, α\_{n}$ *- некоторые нормирующие и центрирующие константы. Если* $F\_{n}(x)$ *- функция распределения случайных величин , то предельными распределениями для* $F\_{n}(x)$ *при* $n\rightarrow \infty $ *могут быть лишь устойчивые распределения.*
* *Обратно, для любого устойчивого распределения* $F\_{}(x)$ *существует последовательность случайных величин* $η\_{n}=\frac{1}{β\_{n}}\sum\_{k=1}^{n}ξ\_{k}-α\_{n}$*,такая, что* $F\_{n}(x)$ *сходится к* $F(x)$ *при* $n\rightarrow \infty $

*(wikipedia)*

**Теорема 3.2 (об асимптотической устойчивости ЭУС).**

Пусть в условиях теоремы 3.1 $π^{\*}$эволюционно устойчивая стратегия для популяционной игры $\overline{G}$. Тогда $π^{\*}$− асимптотически устойчивое распределение системы (3.1).

*Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое*

*распределение* $π^{\*}$*, что* $∀ω\in Ω,∀π\ne π^{\* }∃\overline{λ}(π)\in (0,1):∀λ\in (0, \overline{λ}(π))$

$f\_{π^{\*}}(λπ^{\*}+(1-λ)π^{\*}, ω)>f\_{π}(λπ+(1-λ)π^{}, ω).$

*Здесь − средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π ,*

*если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π ′ .*

*Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую*

*популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π ∗ , внедряется относительно небольшая*

*группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π ∗*

*является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в*

*популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной*

*стратегии* $π^{\*}$ *.*

**Теорема 3.3 (о связи доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения).**

Пусть S - строго доминирующее множество стратегий в игре $G^{'}=<S,ln\overline{ f\_{s}}(π),s\in S, π\in Π>. $

Тогда для любого s ∉ S и любого $\overline{N}(0) > 0$ $\lim\_{t\to \infty }π\_{s}(t,\overline{N}(0)) = 0$на соответствующей траектории системы (3.1).

*Говорят, что стратегия j доминирует стратегию i* $(j⪰i)$*на множестве распределений* $Π^{'}⊆Π,$*если при любом распределении по стратегиям π∈Π′ стратегия j дает больший выигрыш, чем стратегия i, т.е.* $∃ε \geq 0: ∀ω \in Ω, ∀π \in Π^{'} f\_{j}(π, ω) \geq f\_{i}(π,ω) + ε.$

*Множество J ′ ⊆ J называется доминирующим, если оно может быть получено в результате последовательного исключения доминируемых стратегий, т.е. найдется такое целое T > 1, что* $J^{'}=J\_{T}⊂J\_{T-1}⊂....⊂J\_{1}=J$*, где* $∀k\in \left\{1,...T-1\right\}, ∀j \in J\_{k}\J\_{k+1}∃j\in J\_{k+1}:$

$j⪰i на Π\_{k}=\{π\in Π, π\_{j}=0,∀j\notin J\_{k}\}. $

*Такая процедура последовательного исключения доминируемых стратегий может рассматриваться как квазидинамическая модель микроэволюции поведения в популяции. Действительно, эта процедура описывает последовательное сокращение множества стратегий, используемых игроками, при этом на каждом шаге более эффективные (обеспечивающие большую приспособленность) стратегии замещают менее эффективные.*

**Случайное подражание.**

Модель динамики репликаторов предполагает действие эволюционного механизма,

обеспечивающего прямое наследование стратегий родителей детьми. В какой степени

указанные результаты зависят от конкретного эволюционного механизма? Оказывается, что

он играет критически важную роль. В качестве альтернативного примера рассмотрим

механизм случайного подражания.

Эта модель отличается от динамики репликаторов только в одном отношении:

новые индивидуумы не наследуют стратегию родителей, а выбирают в качестве объекта

подражания случайного взрослого индивидуума и перенимают его стратегию.

При этом динамика описывается уравнениями

$N\_{s}(t+1) =N\_{s}(t)ν\_{s}(t) + \sum\_{r}^{}N\_{r}(t)fer\_{r}(t)\left[N\_{s}(t)ν\_{s}(t)/\sum\_{r}^{}N\_{r}(t)ν\_{r}(t)\right], s\in S.$

Динамика такой системы согласована с функцией выживаемости v (t) s в смысле теорем 3.1 –

3.3. Т.е. в данном случае эндогенной функцией полезности оказывается выживаемость, а не

приспособленность.

Исходя из предыдущих примеров, может возникнуть впечатление, что мы зашли в тупик,

сменив произвол в выборе целевых функций на произвол в выборе эволюционного

механизма. Однако, это не так, если принять во внимание, что эволюционные механизмы

тоже подвержены естественному отбору. В природе существует конкуренция эволюционных

механизмов, и с течением времени отбираются наиболее эффективные.

**Модель конкуренции эволюционных механизмов.**

Рассмотрим соответствующую модель сообщества нескольких популяций, различающихся

только эволюционными механизмами.

• Индивидуумы всех популяций взаимодействуют между собой и в процессе

взаимодействия не различают популяций, т.е. эволюционный механизм индивидуума

является ненаблюдаемым параметром.

• Итог взаимодействия для индивидуумов со стратегией s характеризуется функциями

рождаемости и выживаемости$fer\_{s}(π, N) , ν\_{s}(π, N)$, зависящими от общего распределения

по стратегиям во всем сообществе и его численности.

• Множество стратегий S и данные функции одинаковы для всех популяций.

Введем обозначения:

• L – множество популяций,

• $N\_{l}$ – численность популяции l ,

• N – общая численность сообщества,

• $π^{l}=\left\{π\_{s}^{l}, s\in S\right\}$распределение по стратегиям в рамках популяции l.

Тогда общее распределение π по стратегиям выражается как

$π=\sum\_{l}^{}\frac{N^{l}}{N}π^{l}.$

Пусть изменение распределения по стратегиям в популяции l описывается оператором $Φ^{l}$ ,

соответствующим эволюционному механизму этой популяции.

*(Например, в одной популяции – это прямое наследование стратегий, в другой – случайное*

*подражание выжившим и т.п. В частности, динамика поведения может быть связана с*

*максимизацией некоторой функции выигрыша).*

Динамика сообщества описывается системой

$N^{l}(t+1) =N^{l}(t)\sum\_{s}^{}π\_{s}^{l}(t)f\_{s}(π(t), N(t)), t = 1,2,..., (3.2)\_{}$

$π^{l}(t+1)=Φ^{l}(π^{k}(t),N^{k}(t), k\in L), l\in L.^{}$

**Теорема 3.4.**

Пусть в сообществе существует популяция с механизмом прямого наследования и функция приспособленности разложима. Тогда для динамики общего распределения π (t) справедливы следующие аналоги теорем 3.1 и 3.2:

1) любое устойчивое распределение π системы (3.2) является равновесием Нэша в

популяционной игре $\overline{G}=<S,\overline{ f\_{s}}(π),s\in S, π\in Π>;$

2) если для некоторой траектории $\left\{\overline{N}(t)\right\}$ начальное распределение $\overline{N}(0) > 0$ и $\lim\_{t\to \infty }π(t,\overline{N}(0)) = π^{\*}$то π \* является равновесием Нэша указанной популяционной игры;

3) пусть π - строгое равновесие для популяционной игры $\overline{G}$ . Тогда π − асимптотически

устойчивое распределение системы (3.2).

Таким образом, модель отбора эволюционных механизмов приводит к выводу, что

приспособленность является эндогенной функцией полезности для любой

самовоспроизводящейся популяции.

• Идея доказательства первых двух утверждений теоремы прозрачна: если стационарное

распределение по стратегиям не является равновесием Нэша относительно функции

приспособленности, то ничто не может помешать распространению репликаторов,

использующих стратегию оптимального ответа на это распределение, что

противоречит его устойчивости.

• Для обобщения теоремы 3.3 об исключении доминируемых стратегий требуются более

сильные предположения о разнообразии эволюционных механизмов. Пусть в

сообществе есть популяция с эволюционным механизмом $Φ^{l}$. Для любой пары

стратегий s, r назовем s-r-замещением механизма $Φ^{l}$ механизм $Φ\_{s,r}^{l}$ такой, что для

стратегий, отличающихся от s, r , доли индивидуумов, использующих эти стратегии,

меняются так же, как и при механизме $Φ^{l}$ , а вместо стратегии s всегда используется стратегия r . Как показано в (Васин , 1995), если для любых s, r, l множество

механизмов содержит всевозможные замещения $Φ\_{s,r}^{l}$, то справедлив аналог теоремы

3.3: всякая исключаемая по строгому доминированию стратегия исчезает со временем,

то есть $π\_{s}(t)\rightarrow 0 при t\rightarrow \infty .$

• Сформулированный результат относится к однородным популяциям без учета

возрастной и половой структуры, но легко обобщается для популяций с такими

структурами. Аналогом приспособленности при этом является скорость

сбалансированного роста популяции, определяемая числом Фробениуса матрицы Лесли

(см. Семевский, Семенов, 1982).

**Выводы**

• Изложенные модели и результаты ЭТИ показывают, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся

популяциях согласована с известными теоретико-игровыми принципами оптимальности – равновесием

Нэша и исключением доминируемых стратегий.

• Эндогенно формируемая функция выигрыша соответствует определенной Ч. Дарвином индивидуальной

приспособленности.

**Проблемы**

• Однако, как в биологических, так и в социальных популяциях хорошо известны такие формы поведения, как кооперация и альтруизм, которые, видимо, не согласуются с оптимизацией индивидуальной приспособленности.

• Проблема устойчивости смешанных равновесий, т. е. распределений по стратегиям, в которых более одной чистой стратегии используется с положительной вероятностью.

*Эта проблема возникает для межпопуляционных взаимодействий, в которых значение выигрыша для индивидуумов одной популяции зависит от распределения по стратегиям в другой популяции, а также для внутрипопуляционных случайных столкновений при наличии ролевой асимметрии между участниками столкновения. Для таких игр смешанные равновесия Нэша никогда не являются эволюционно устойчивыми, а строгих равновесий Нэша может не существовать. Таким образом, не работают достаточные условия устойчивости.*

• Распространение альтруистического и кооперативного поведения.

*Указанные формы поведения наблюдаются как в биологических, так и в социальных популяциях и, по-видимому, противоречат условию максимизации индивидуальной приспособленности.*

• Применимость рассматриваемых эволюционных моделей к социальным популяциям.

Понятие супериндивида - самовоспроизводящейся структуры, которая использует человеческую популяцию как ресурс для собственного воспроизводства и способна влиять на динамику поведения в этой популяции.